Einführung von Radioaktivität mittels Wahrscheinlichkeitsrechnung

von
Alexandra Jansky

Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden zufällige Phänomene mit Hilfe von mathematischen Modellen modelliert. Das heißt mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsrechnung können wir in gewissen Maße Vorhersagen über zufällige Ereignisse treffen. Eine Möglichkeit dafür bietet das Gesetz der großen Zahlen.

1. Einführung Gesetz der großen Zahlen.

Es besagt, dass wenn du ein Zufallsexperiment sehr oft hintereinander oder viele Experimente gleichzeitig durchführst, die relative Häufigkeit eines Ausgangs der Wahrscheinlichkeit dieses Ausgangs entspricht. Ich möchte das anhand eines Beispiels näher erläutern.

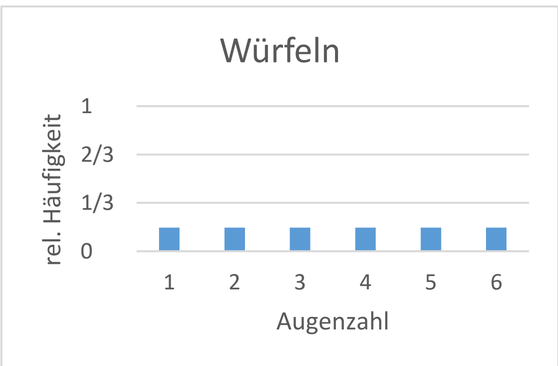
Zufallsexperiment: Wenn du zum Beispiel mit einem Würfel würfelst, kannst du nicht vorhersagen, auf welcher Zahl er am Ende landet. Du kannst lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen. Würfeln wäre also ein Zufallsexperiment.

Gesetz der großen Zahlen: Wenn du sehr oft hintereinander würfelst und notierst, wie oft welche Zahl erscheint, bekommst du eine Verteilung. Während bei einem einzelnen Wurf nicht vorhersagbar ist, auf welcher Zahl der Würfel landet, sieht so eine Verteilung (mit genügend Wiederholungen) immer gleich aus.

Absolute und relative Häufigkeit: Zählst du einfach nur, wie oft einer der verschiedenen Ausgänge, also beim Würfeln wie oft eine Eins, eine Zwei usw., gekommen ist, hast du die Verteilung mit der absoluten Häufigkeit bestimmt. Wenn du die absolute Häufigkeit durch die Anzahl der Wiederholungen dividierst, erhältst du die relative Häufigkeit. Die relative Häufigkeit entspricht nach dem Gesetz der großen Zahlen der Wahrscheinlichkeit. Eine Verteilung mit der relativen Häufigkeit nennt man auch Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Zwei Beispiele:

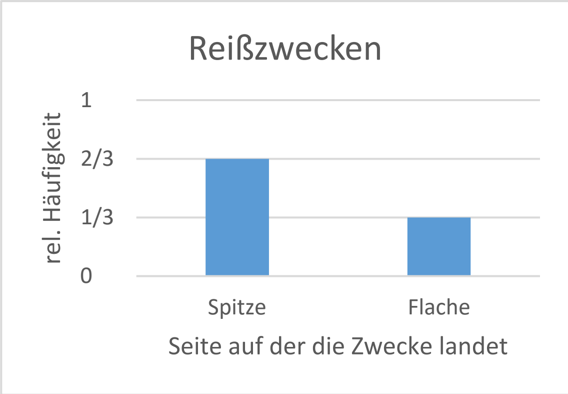
1. Würfeln: Gleichverteilung



Wenn du mehrmals mit einem Würfel würfelst und zählst, wie oft du eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 bekommst, wirst du feststellen, dass am Ende alle Zahlen ungefähr gleich oft erscheinen werden. Beim Würfeln erhältst du also eine Gleichverteilung. Diese Verteilung ist im Graphen links abgebildet.

2. Reißzwecken: Keine Gleichverteilung

   Wenn man Reißzwecken „werfen“ würde, würde die Verteilung anders aussehen.



Denn es kommt häufiger vor, dass das spitze Ende nach unten schaut als das flache. Daher ist auch die Wahrscheinlichkeit für das spitze Ende höher als für das flache. Beim Werfen von Reißzwecken erhältst du also keine Gleichverteilung. Die Verteilung könnte wie links abgebildet aussehen.

Aufgaben:

1. Kannst du mir die Wahrscheinlichkeit dafür nennen, dass eine Reißzwecke beim ersten Wurf auf der flachen Seite landet?

2. Die Halbkugeln:

   a. Kannst du die Wahrscheinlichkeitsverteilung für diese Halbkugel finden?
   b. Wie würdest du dann vorgehen, wenn du diese ganze Box mit 50/100/1000 identischen Halbkugeln zur Verfügung hast?
   c. Könntest du die Wahrscheinlichkeit schon beim ersten Wurf herausfinden?
   d. Stell dir vor du hast 10.000 Halbkugeln in der Box und du wirfst sie alle gleichzeitig 10-mal hintereinander.

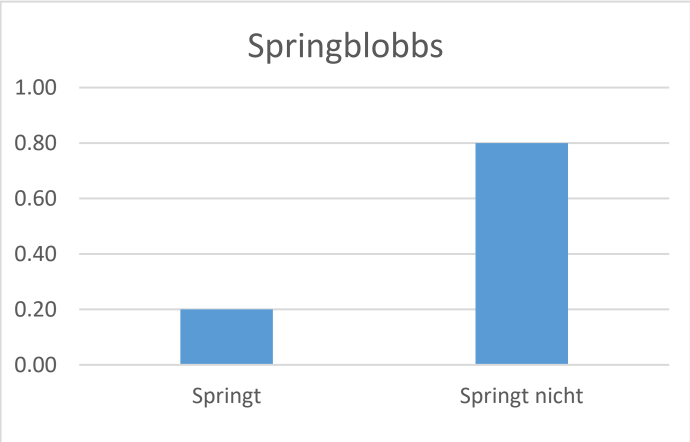
      i. Wie viele werden pro Wurf auf der flachen Seite landen?
      ii. Wie hängt das mit der Wahrscheinlichkeit für die flache Seite zusammen?

2. Das Problem mit der Zeit

Hat man keine 10.000 Halbkugeln, könnte man zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass eine Halbkugel beim Werfen auf der flachen Seite landet, auch **eine** Halbkugel sehr häufig werfen und immer zählen, wie viele Würfe es dauert, bis sie auf einer flachen Seite liegt. In allen Fällen ermittelt man sozusagen eine **Wahrscheinlichkeit pro Wurf.**

Dies ist im Falle von diskreten Wiederholungen wie beim Werfen einer Halbkugel noch recht einfach. Es wird jedoch schwieriger, wenn man eine **Wahrscheinlichkeit pro Zeit** ermitteln möchte.

Zum Beispiel bei diesen Springblobbs.



Sie haben eine gewisse Sprungwahrscheinlichkeit, die für jedes Zeitintervall gleich ist. Springt der Springblobb zum Beispiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/10 pro Zeitintervall, würde die Wahrscheinlichkeitsverteilung für jedes Zeitintervall, wie links abgebildet, aussehen.

In diesem Fall gibt man eine Wahrscheinlichkeit pro Zeit an, es ist also zufällig, dass der Springblobb zu einem gewissen Zeitpunkt springt. Bei den Halbkugeln gibt man eine Wahrscheinlichkeit pro Wurf an, es ist also zufällig, dass die Halbkugel bei einem Wurf auf der flachen Seite landet.

Wie ermittelt man so eine Wahrscheinlichkeit pro Zeit?

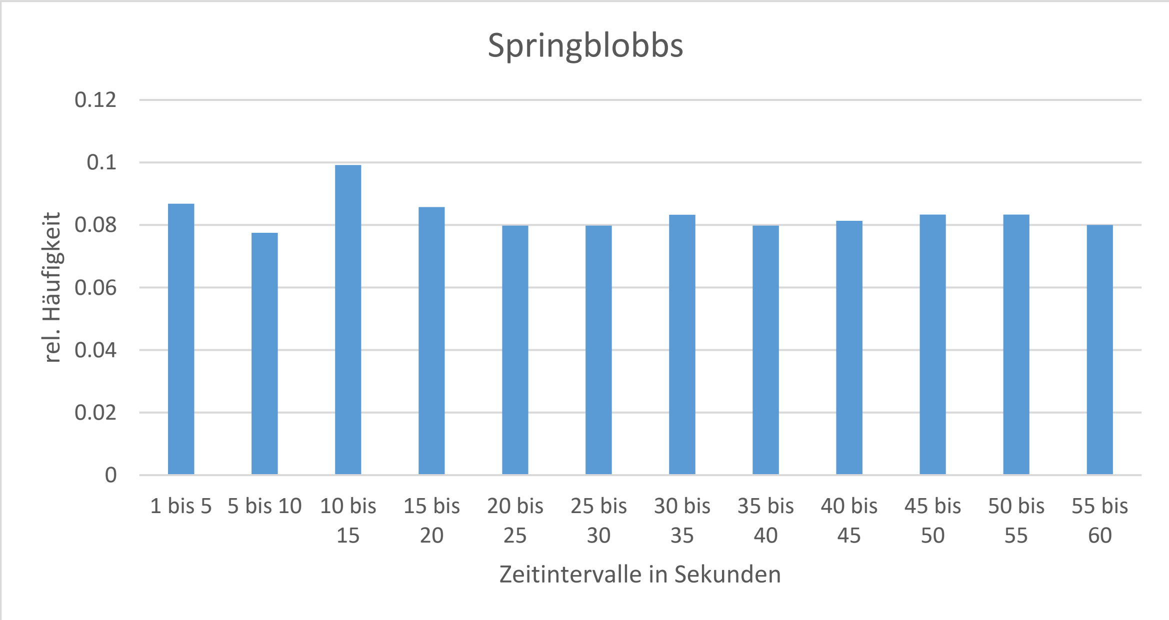
Zum Ermitteln der Sprungwahrscheinlichkeit kann man zum Beispiel einen Springblobb sehr häufig springen lassen und jedes Mal die Zeit solange stoppen, bis er springt. Auch hier wird man nach sehr häufigen Wiederholungen eine Sprungwahrscheinlichkeitsverteilung pro Zeit feststellen können, also mit welcher Wahrscheinlichkeit er in einem Zeitintervall springt.

Warum Zeitintervalle?

Da die Zeit kontinuierlich vergeht, teilt man sie meistens in Intervalle ein, zum Beispiel Sekunden. Auch unserem Fall, verwendet man Zeitintervalle also zur Vereinfachung. zum Beispiel zählt man, wie oft der Blobb im ersten Zeitintervall gesprungen ist (1-5 Sekunden), wie oft er im zweiten Zeitintervall gesprungen ist (5-10 Sekunden) usw.

Aufgaben/Diskussion

Alexandra hat 10.000 Springblobbs springen lassen und die Zeit gestoppt. Das sind ihre Ergebnisse.



1. Interpretiere den Graphen.
   a. Was würdest du Alexandra raten?
   b. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Springblobb im Zeitintervall 20 bis 25 springt?
   c. Stell dir vor du hast 10.000 Springblobbs mit der Sprungwahrscheinlichkeit 8/100 pro Zeitintervall. Wie viele Springblobbs sind nach dem Zeitintervall 1 bis 5 Sekunden noch nicht gesprungen?

Der radioaktive Zerfall

Bisher haben wir verschiedene Modelle verwendet, um die Wahrscheinlichkeitstheorie mit dem Gesetz der großen Zahlen etwas verständlicher zu machen. Das makroskopische Modell mit den Springblobbs eignet sich jedoch gut, um den radioaktiven Zerfall eines instabilen Atomkerns zu modellieren.

Stabile Kerne und instabile Kerne:

Beim radioaktiven Zerfall eines instabilen Atomkerns ist es ähnlich wie bei den Springblobbs. Man kann zum Beispiel sagen, dass wenn der Blobb umgeklappt ist, dann ist er instabil. Wenn er einmal gesprungen ist, dann ist er zerfallen, also stabil. Es gibt Atomkerne die aufgrund ihrer inneren Struktur instabil sind, also spontan zerfallen. Mit zerfallen meint man hier „in einen stabileren Zustand“ übergehen. Das heißt, wenn der instabile Atomkern nach Emission eines Teilchens stabil ist, wird er nicht weiter zerfallen.
Im Grunde wäre es besser, wenn man anstatt **„Zerfall“ „Umwandlung“ oder „Transformation“** sagen würde. Denn der Atomkern zerfällt nicht in einzelne Teile oder auch nicht kontinuierlich bis nichts mehr da ist, sondern er wandelt sich unter Aussendung eines Teilchens um.

Wir betrachten den einfachsten Fall: Es wandelt sich ein instabiler Atomkern einmal um und ist danach stabil, so wie bei den Springblobbs.

Die Sprungwahrscheinlichkeit pro Zeit wird nun Zerfallswahrscheinlichkeit genannt, also eine Wahrscheinlichkeit, dass sich ein instabiler Atomkern in einem Zeitintervall umwandelt. Diese Wahrscheinlichkeit ist für Atome desselben Elements immer gleich - Sie ist eine Naturkonstante.

Verschiedene Elemente haben jedoch eine unterschiedliche Zerfallswahrscheinlichkeit. Der Zeitpunkt, wann sich ein einzelner Atomkern umwandelt, ist zufällig. Mit dem Gesetz der Großen Zahlen kann man also, wenn man viele instabile Atomkerne desselben Elements hat, die Zerfallswahrscheinlichkeit bestimmen.

Aufgaben:

2.a. Stell dir vor du hast 10.000 instabile Atomkerne desselben Elements mit der Zerfallswahrscheinlichkeit 1/5 pro Zeitintervall. Wie viele instabile Atomkerne sind nach dem ersten Zeitintervall noch nicht umgewandelt?

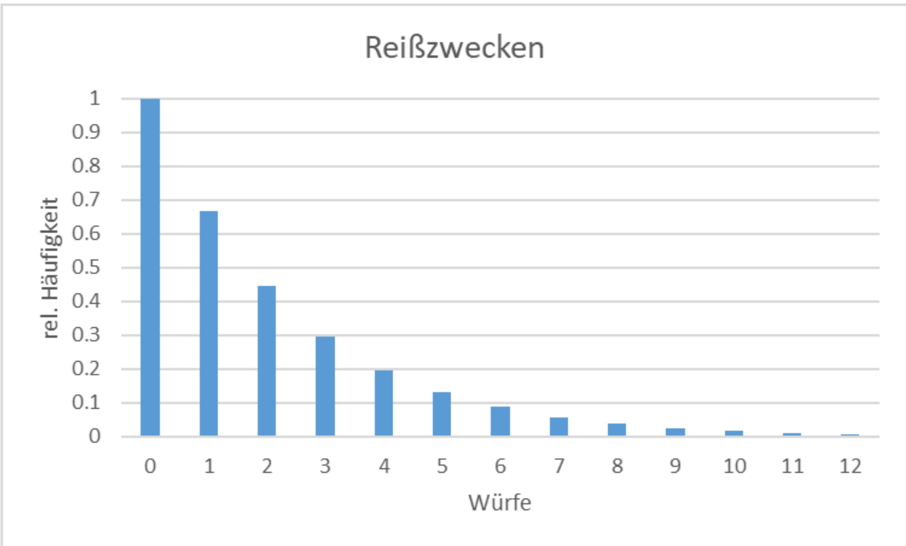
2.b. Zeichne den Graphen für die ersten 10 Zeitintervalle. Du startest mit 10.000 instabilen Atomkernen, die nach einmaligem Zerfall stabil sind.

Halbwertszeit

Bei der Halbwertszeit handelt es sich um die Zeit, nach der sich die Hälfte aller instabilen Atomkerne eines Ensembles umgewandelt haben. Man kann auch die Halbwertszeit von Reißzwecken berechnen.

Reißzwecken mit aussortieren

Wir werfen wieder Reißzwecken als Modell für instabile Atomkerne. Nun lassen wir jedoch die, die auf der flachen Seite landen, liegen. Sie sind stabil und wollen sich nicht mehr umwandeln. Beim nächsten Wurf nehmen wir die, die nicht auf der flachen Seite gelandet sind, und werfen sie wieder. Wir zählen jeweils, wie viele „instabile“ Reißzwecken noch da sind, und tragen das in ein Diagramm ein. Am Ende wird die Verteilung so aussehen. Denn am Anfang sind noch alle Reißzwecken „instabil“ und werden zu einem 1/3 Wahrscheinlichkeit beim ersten Wurf auf der flachen Seite landen. Beim nächsten Wurf sind schon ein 1/3 der Reißzwecken „stabil“ und werden nicht mehr mit geworfen usw.

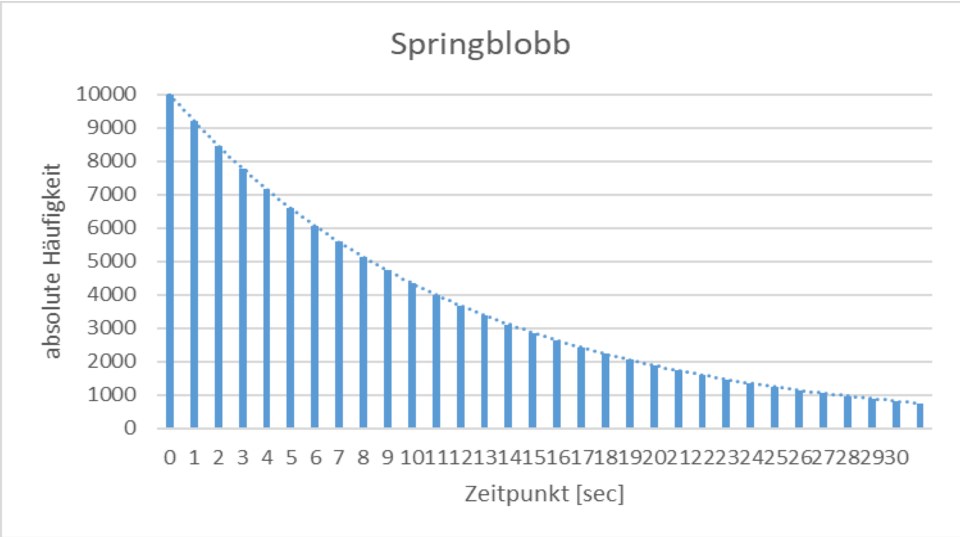


In diesem Fall wäre die Halbwertszeit gar keine Zeit, sondern würde zwischen erstem und zweitem Wurf liegen, sozusagen der Halbwertswurf.

Nun aber wirklich HalbwertsZEIT: Springblobbs

Wir verwenden wieder das Modell der Springblobbs für instabile Atomkerne und zählen, wie viele pro Sekunde noch liegen bleiben, also noch „instabil“ sind. Das können wir jetzt nicht ausprobieren, weil es viel zu schwierig ist, genügend viele Springblobbs gleichzeitig zu spannen und loszulassen. Wir können es jedoch mit 10 probieren und vielleicht schon erahnen, wie die Verteilung mit 10.000 aussehen würde. *(Bereitet Apparatur vor)*

Kannst du dir vorstellen, wie das aussehen könnte?



Kannst du sagen, wo die Halbwertszeit liegt?

Aufgaben:

3.a. In einem Ensemble von instabilen Atomkernen haben die Atomkerne eine Zerfallswahrscheinlichkeit von ¼ pro Sekunde. Zu Beginn sind 10.000 instabile Atomkerne desselben Elements im Ensemble. Kannst du die Halbwertszeit herausfinden?

3.b. Wie gehst du vor, wenn du weißt, dass die Halbwertszeit eines Elements 1 min beträgt, und du möchtest herausfinden, wie viele instabile Atomkerne nach 3 min noch nicht zerfallen sind, also noch instabil? Zeichne den Graphen.

3.c. Bisher sind wir davon ausgegangen, dass wir instabile Kerne beobachten können. Jedoch können wir das leider nicht. In Wirklichkeit messen wir nur das Zerfallsprodukt, zum Beispiel ein α-Teilchen. Stell dir vor wir haben 100 instabile Kerne gesammelt, die durch Aussendung eines α-Teilchens zerfallen. Die Kerne haben eine Halbwertszeit von 10 Sekunden. Wir messen die α-Teilchen. Zeichne im untenstehenden Plot ein, wie viele α-Teilchen in den jeweiligen Zeitintervallen gemessen werden.

3.d. Stell dir vor du hast 10 instabile Atomkerne (vom selben Element) in einem Käfig gefangen. Dein Ziel ist es, einen Zerfall zu beobachten. Du kannst aber nur ein kurzes Zeitintervall auswählen, in welchem du die Kerne beobachten möchtest. Was wäre deine bevorzugte Beobachtungszeit?