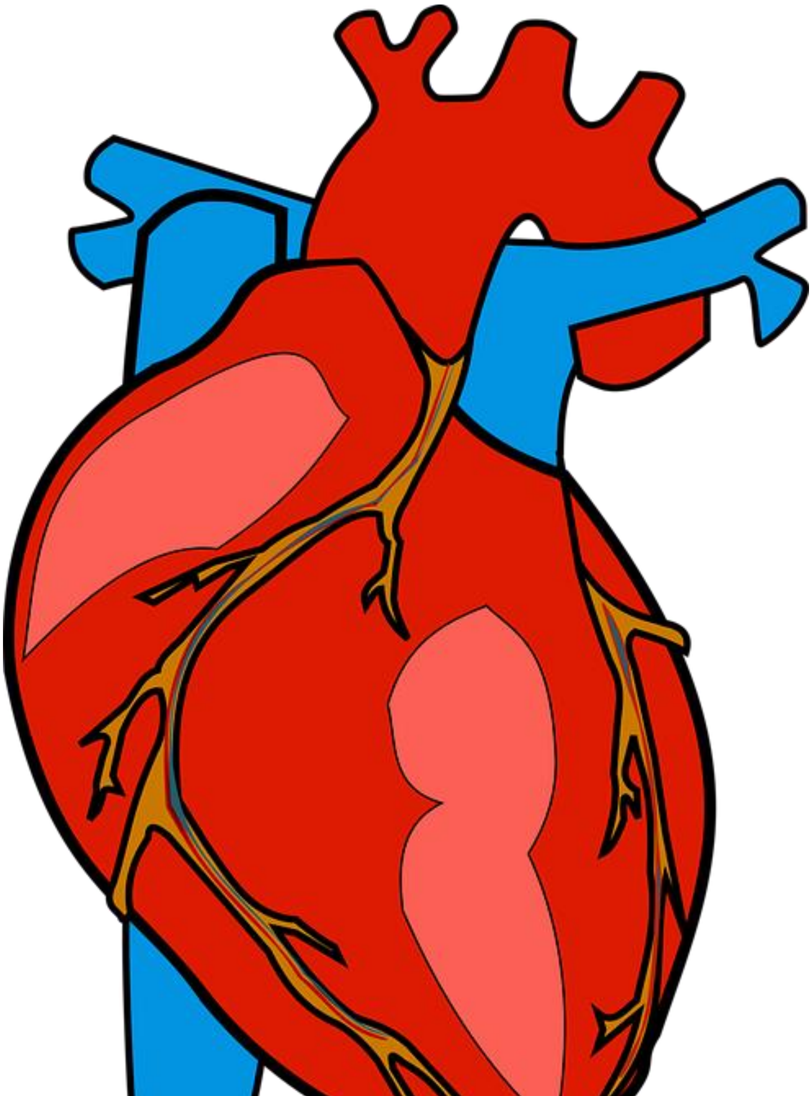
Der Blutkreislauf

aus der Sicht der Biomechanik



von Florian Kleiss, BEd und Dominik Kögel, BEd

Juni 2022

Kapitel 1 – Der Blutkreislauf und die Viskosität

Der Blutkreislauf

Im menschlichen Organismus wird das Blut über ein System von Gefäßen durch den Körper transportiert. Es gibt zwei Kreisläufe, die in Verbindung miteinander stehen: der große *Körperkreislauf* und der kleine *Herz-Lunge-Kreislauf*.

Im Herz-Lunge-Kreislauf wird sauerstoffarmes Blut von der rechten Herzhälfte in die Lunge gepumpt. Dort gibt es CO_2 durch Kapillaren ab und nimmt Sauerstoff auf. Das Blut kommt danach weiter in die linke Herzhälfte, die es in die Arterien ausstößt. Die großen Arterien verfeinern sich in feine Kapillaren, die den Sauerstoff an die Zellen liefern. Die Kapillaren sammeln sich anschließend wieder zu Venen, die das sauerstoff- und nährstoffarme Blut zurück in die rechte Herzhälfte leiten. Der Kreislauf beginnt hier anschließend von Neuem.

1.1 Vervollständige Abbildung 1 mithilfe der Informationen, die du dem Text entnehmen konntest!

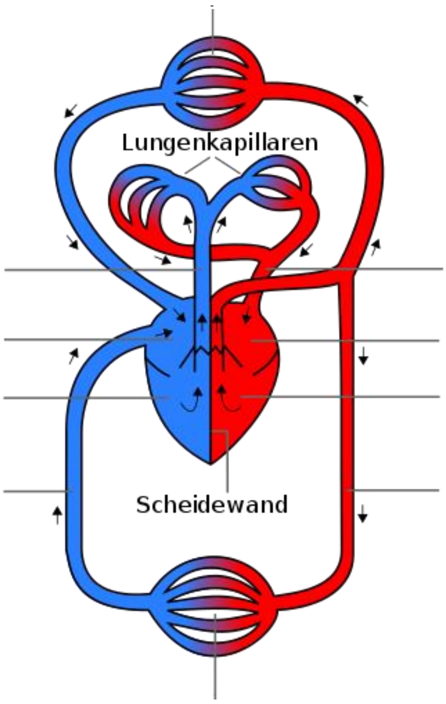


Abbildung 1: Blutkreisläufe im menschlichen Körper

Unser Blutkreislauf besteht aus einer geringen Anzahl an Arterien und Venen, welche einen Durchmesser von bis zu 2 cm haben können! Von den Kapillaren wiederum gibt es Millionen in unserem Körper, allerdings sind sie nur wenige Mikrometer groß.

1.2 Arbeite aus den gegebenen Informationen heraus, um welche Zehnerpotenz sich der Durchmesser von Arterien und Kapillaren unterscheidet!

Strömungen und die Viskosität

Bewegt sich eine Flüssigkeit (Fluid) in einem Leiter (so wie Blut in den Blutgefäßen), so spricht man von einer *Strömung*. Mit einem Stromlinienbild kann man darstellen, wie sich die Flüssigkeitsteilchen während einer Strömung verhalten. Man unterscheidet dabei im Grunde zwischen zwei Fällen:

1) **Laminare Strömungen:** die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen überkreuzen sich nicht.
2) **Turbulente Strömungen:** zwischen den Flüssigkeitsteilchen kommt es zu Verwirbelungen und die Bahnen der Flüssigkeiten kreuzen sich.

1.3 In den Abbildungen 2 und 3 siehst du Stromlinienbilder. Beschrifte sie korrekt!

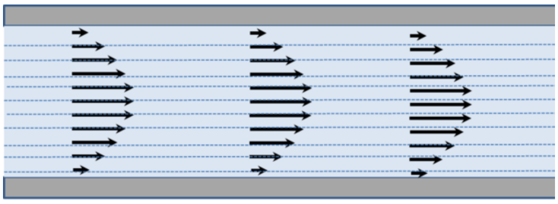


Abbildung 2

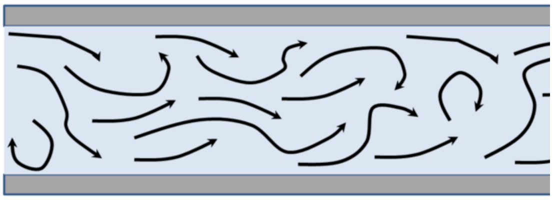


Abbildung 3

Das ist eine ___________ Strömung.

Das ist eine ___________ Strömung.

Beim Transport von Flüssigkeiten, wie eben beim Blutkreislauf, sind laminare Strömungen von Vorteil, da bei diesen der Druckverlust entlang des durchflossenen Gefäßes deutlich geringer ausfällt. Doch auch bei der laminaren Strömung finden Energieverluste durch die Reibung von benachbarten Teilchen statt. Die Stärke dieser Reibung hängt von der Art der Flüssigkeit und deren Temperatur ab und wird *Viskosität (Zähigkeit)* η genannt. Es gilt: je geringer die Viskosität, desto dünnflüssiger das Fluid, und je höher die Viskosität, desto dickflüssiger das Fluid. Oft wird die Viskosität in Millipascal mal Sekunde $(mPa \cdot s)$ angegeben.

In der folgenden Tabelle findest du ausgesuchte Werte für die Viskositäten von Flüssigkeiten.

Substanz	$\boldsymbol{\eta}$ **in** $\boldsymbol{mPa \cdot s}$
Wasser (bei 20 $°C$)	1
Motoröl	300
Glycerin	1.480
Blutplasma	1.730
Honig	10.000

1.4 Betrachte die Tabelle und überlege, ob die Viskosität von Blut niedriger oder höher als die von Wasser ist! Begründe deine Vermutung!

Ist die Viskosität unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit v des Fluids, so sprechen wir von einer *Newton'schen Flüssigkeit*. Beispiele für Newton'sche Flüssigkeiten sind z.B. Wasser und Öl. Die Viskosität von Blut bleibt bei einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit nicht gleich, weshalb es eigentlich kein Newton'sches Fluid ist; dazu aber später mehr.

Auch bei Newton'schen Flüssigkeiten ist die Viskosität nur konstant, wenn man auch die Temperatur der Flüssigkeit konstant hält. Die Viskosität von Wasser ist beispielsweise stark temperaturabhängig: je wärmer das Wasser, umso niedriger die Viskosität.

Blutgefäße haben einen kreisrunden Querschnitt. Im weiteren Verlauf wird stets angenommen, dass es sich um Gefäße mit einem kreisrunden Querschnitt handelt.

Kapitel 2 - Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Einleitung

Um laminare Strömungen von Newton'schen Fluiden in Rohren zu beschreiben, verwendet man den Volumenstrom j, der das durch den Rohrquerschnitt geflossene Volumen ΔV pro Zeiteinheit Δt angibt:

$$j = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (1)$$

Der Volumenstrom j und der durch die Reibung an den Gefäßwänden auftretende Druckverlust (bzw. Druckdifferenz) Δp zwischen dem Anfang und dem Ende des Rohres sind direkt proportional zueinander, mit dem Strömungswiderstand R als Proportionalitätsfaktor:

$$\Delta p = R \cdot j \qquad (2)$$

Der Strömungswiderstand R ist bei laminaren Strömungen eine Konstante, die von mehreren Parametern des Rohres und der Flüssigkeit abhängt. Wegen seiner Ähnlichkeit bezeichnet man Formel (2) auch als das *Ohm'sche Gesetz für laminare Strömungen*.

2.1 Gib das Ohm'sche Gesetz beim elektrischen Stromkreis an!

2.2 Welche Variable aus Formel (2) entspricht welchem Teil des Ohm'schen Gesetzes für Stromkreise?

$\Delta p \equiv$ ______________________

$R \equiv$ _______________________

$j \equiv$ ________________________

Abhängigkeit des Strömungswiderstandes R vom Radius

Im weiteren Verlauf wirst du Experimente mit Kanülen durchführen. Die Größen aller im Handel erhältlichen Kanülen entsprechen der ISO-Norm, wobei auf der Verpackung immer der äußere Durchmesser der Kanüle angegeben ist. *Für das Experiment relevant ist allerdings der innere Radius r der Kanüle!* Im Anhang findest du eine Tabelle, in der du bei bekanntem äußeren Durchmesser den inneren Radius der Kanüle ablesen kannst und umgekehrt.

Zunächst interessiert uns die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes vom Radius r des (zylinderförmigen) Gefäßes. Führe zum Einstieg dazu einen kleinen Versuch durch!

2.3 Befülle eine Spritze mit $10\ ml$ Wasser und setze eine Kanüle mit innerem Radius $r = 0{,}30\ mm$ auf. Versuche nun, das Wasser aus der Spritze durch die Kanüle zu drücken. Wiederhole den Versuch, verwende diesmal aber eine Kanüle mit $r = 0{,}15\ mm$. Achte darauf, beide Male so gut es geht mit gleicher Kraft zu drücken! Was fällt dir auf?

2.4 Versuche nun, in eigenen Worten den Zusammenhang zwischen den Radius r und dem Volumenstrom j zu beschreiben!

2.5 Der Volumenstrom und der Radius des Rohres sind jedoch sicher nicht direkt proportional zueinander (also eine Verdoppelung des Radius r führt nicht zu einem doppelt so großen Volumenstrom j). Begründe, warum das nicht der Fall sein kann!

2.6 Welchen mathematischen Zusammenhang erwartest du stattdessen zwischen dem Radius r des Gefäßes und dem Volumenstrom j der Flüssigkeit (mit welcher Potenz wirkt r auf j ein)? Verfasse eine Vermutung und argumentiere!

Deine Annahme wollen wir nun experimentell überprüfen. Bevor jedoch der Versuch durchgeführt werden kann, müssen wir noch einmal kurz zum Ohm'schen Gesetz für laminare Strömungen (Formel (2)) zurückkehren.

Aus den bisherigen Überlegungen kann die Annahme getroffen werden, dass der Strömungswiderstand R bei einer konstanten Druckdifferenz Δp folgendermaßen mit dem Radius r des Rohres zusammenhängt:

$$R = k \cdot \frac{1}{r^b} \qquad (3)$$

In Formel (3) bezeichnet b jene Potenz, welche für den Radius r in Aufgabe 2.5 vermutet wurde. Die Variable k fungiert zunächst als Platzhalter für alle weiteren Parameter von R.

Die Annahme aus Formel (3) kann nun in das Strömungsgesetz aus Formel (2) eingesetzt und nach Δt umgeformt werden:

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{\Delta p} \cdot k \cdot \frac{1}{r^b} \qquad (4)$$

Im Zuge des Versuchs werden sowohl Volumen- und Druckdifferenz als auch alle weiteren Parameter des Strömungswiderstandes (R) konstant gehalten, weshalb der Faktor $\frac{\Delta V}{\Delta p} \cdot k$ als Konstante a abgekürzt werden kann. Die Zeit t, bis die gesamte Flüssigkeit durch die Kanüle entronnen ist, ist dann nur noch eine Funktion des Radius r:

$$t(r) = a \cdot \frac{1}{r^b} = a \cdot r^{-b} \qquad (5)$$

Der Faktor a ist an dieser Stelle für uns noch uninteressant. Die Vermutung für den Wert der Potenz b soll nun experimentell überprüft werden.

Um die Potenz b experimentell herauszufinden, brauchst du die folgenden Materialien:

- Stativmaterial
- eine 10 ml-Spritze mit einem gut beweglichen Kolben
- Kanülen mit vier verschiedenen äußeren Durchmessern
- ein großes Becherglas
- ein Massestück (idealerweise zylinderförmig; in unserem Fall zum Beispiel $m = 1\ kg$)

Der Versuch sollte für dich schon aufgebaut sein und in etwa wie in Abbildung 4 aussehen. Die Spritze wird so am Stativ befestigt, dass sie zwar fest sitzt, aber der Kolben noch immer gut beweglich ist. Das Becherglas wird zum Teil mit Wasser gefüllt und unter der Spritze platziert.

Abbildung 4: Versuchsaufbau

2.7 Überprüfe, ob der Versuch richtig aufgebaut ist, und befülle die Spritze mit $5\ ml$ *Wasser. Stecke die erste der vier Kanülen auf die Spritze, lege das Massestück mittig auf und miss die Zeit zwischen dem Ein- und Aussetzen des Wasserstrahls. Sei dabei sehr genau und dokumentiere alle Messungen in der Tabelle weiter unten! Führe den Versuch vier weitere Male mit der gleichen Kanüle durch und ermittle danach den Mittelwert der fünf Messungen, um einen besonders genauen Wert für die verstrichene Zeit zu erhalten! Wiederhole im Anschluss den Versuch mit drei weiteren Kanülen!*

Anmerkung 1: Erinnere dich daran, dass für das Experiment nicht der äußere Durchmesser, den du auf der Verpackung findest, sondern der innere Radius der Kanüle relevant ist! Benütze die Tabelle im Anhang, um die inneren Radien herauszufinden!

Anmerkung 2: Da immer dasselbe Massestück verwendet wird, ist der Druckunterschied Δp *konstant. Befüllst du die Spritze vor jedem Durchgang mit derselben Menge Wasser, ist auch* ΔV *konstant.*

Ergebnisse der Messungen:

	$\boldsymbol{r_1}$ =	$\boldsymbol{r_2}$ =	$\boldsymbol{r_3}$ =	$\boldsymbol{r_4}$ =
$\boldsymbol{t_1}$				
$\boldsymbol{t_2}$				
$\boldsymbol{t_3}$				
$\boldsymbol{t_4}$				
$\boldsymbol{t_5}$				
Mittelwert $\boldsymbol{\bar{t}}$				

Gib nun die Wertepaare (Radius r_i mit entsprechendem Mittelwert $\bar{t}$) als Punkte im Programm GeoGebra *ein! Mithilfe der Funktion* TrendPot *wird dir eine Regressionskurve angezeigt, aus der du den Wert für b ablesen kannst. Runde anschließend auf die Einerstelle, sodass du eine natürliche Zahl erhältst!*

$$b = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \approx \_\_\_\_$$

Der Radius r des Gefäßes geht also mit der _____ Potenz in den Strömungswiderstand R einer Flüssigkeit ein. Vervollständige Formel (6)!

$$R = k \cdot \frac{1}{\quad} \tag{6}$$

Stimmt das mit deiner Erwartung aus Aufgabe 2.6 überein? ☐ ja ☐ nein

2.8 Versuche nun, eine (physikalische) Erklärung dafür zu finden, warum es sein kann, dass der Radius mit der eben herausgefundenen Potenz den Strömungswiderstand des Fluids beeinflusst! Tausche dich dazu gerne mit der Lehrperson und den anderen Lernenden aus!

2.9 Was passiert demnach mit dem Volumenstrom j, wenn man den Radius des Gefäßes halbiert bzw. drittelt? Versuche danach, einen allgemeinen Zusammenhang zu formulieren!

Abhängigkeit des Strömungsradius R von anderen Parametern

In den Strömungswiderstand R und somit in das Strömungsgesetz fließen jedoch noch weitere Parameter ein, die wir in Formel (3) als Konstante k zusammengefasst haben. Dabei handelt es sich einerseits um die bereits in Teil 1 besprochene Viskosität η und andererseits um die Rohrlänge l. Beide waren beim vorherigen Versuch konstant, weshalb wir sie dort nicht weiter beachten mussten. Nun wollen wir zumindest qualitative Aussagen mithilfe weiterer Experimente versuchen.

2.10 Formuliere Vermutungen für die Zusammenhänge zwischen der Viskosität η und der Rohrlänge l zum Volumenstrom j (direkt oder indirekt proportional) und begründe deine Entscheidung!

Erneut wollen wir nun deine Vermutungen überprüfen.

2.11 Verwende den Versuchsaufbau von vorhin und schließe nacheinander zwei verschiedene Kanülen mit gleichem inneren Radius r, aber unterschiedlicher Rohrlänge l an! Miss erneut jeweils die Zeit zwischen Anfang und Ende des austretenden Wasserstrahls! Was fällt dir auf?

2.12 Nun wollen wir noch die Abhängigkeit des Strömungswiderstands von der Viskosität überprüfen. Wiederhole dazu den Versuch, verwende diesmal aber beide Male dieselbe Kanüle! Fülle stattdessen einmal kaltes ($T \approx 10° C$) und einmal heißes ($T \approx 40° C$) Wasser in die Spritze. Was fällt dir auf?

(Hinweis: wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, sinkt die Viskosität von Wasser, wenn man die Temperatur erhöht. Bei $40° C$ hat Wasser circa die halbe Viskosität wie bei $10° C$.)

2.13 Vergleiche deine Beobachtungen mit deinen Erwartungen aus Aufgabe 2.10! Stimmen Vermutung und Ergebnis überein? Was überrascht dich?

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen

Es sind nun alle notwendigen Parameter erarbeitet, um das Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen vollständig aufstellen zu können.

2.14 Fülle zunächst die Formel des Strömungswiderstands R anhand der Ergebnisse aus 2.11 und 2.12 vollständig mit den Parametern η, l und r auf (Hinweis: η und l gehen mit der Potenz 1 in die Formel ein)!

$$R = \frac{8}{\pi} \cdot \underline{\qquad} \tag{7}$$

Bei $\frac{8}{\pi}$ handelt es sich um eine Konstante, die bei der mathematischen Herleitung des Gesetzes herausgefunden wurde und die die Geometrie des Gefäßes widerspiegelt.

2.15 Setze nun Formel (7) in das Strömungsgesetz aus Formel (2) ein, um das vollständige Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen *zu erhalten!*

$$\Delta p = R \cdot j = \frac{8}{\pi} \cdot \underline{\qquad} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{8}$$

Überlege, ob die Erhöhung der Parameter ($\Delta p, \eta, l, r$) zu einer Steigerung bzw. Senkung des Volumenstroms j führt und trage sie in die passende Spalte ein!

Volumenstrom steigt	**Volumenstrom sinkt**

Es folgen nun zwei quantitative Aufgaben, bei denen das Gesetz von Hagen-Poiseuille angewandt wird.

2.16 Berechne den Strömungswiderstand R einer Kanüle deiner Wahl! Wähle dazu die Viskosität, die Wasser bei $20°C$ hat (die Viskositäten von Wasser bei verschiedenen Temperaturen findest du im Anhang)! Die Einheit des Strömungswiderstandes ist $Pa \cdot s/m^3$.

2.17 Wie groß ist der Druckverlust Δp, der durch die Reibung des Fluids an den Wänden zwischen den beiden Enden der Kanüle entsteht (Hinweis: den Volumenstrom j kannst du mithilfe der vorhin durchgeführten Messung berechnen)?

Anwendung im Blutkreislauf

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille kann auch auf Flüssigkeitskreisläufe bei Lebewesen angewandt werden, wie etwa den Blutkreislauf beim Menschen. Blut ist zwar, wie in Teil 1 erwähnt, kein Newton'sches Fluid, aber unter natürlichen Druckverhältnissen in Blutgefäßen, die einen Radius von mehr als $1\ mm$ haben, verhält es sich so, als wäre es eines. Für welche Blutgefäße kann man also das Gesetz von Hagen-Poiseuille relativ bedenkenlos anwenden?

2.18 Kreuze an und begründe danach deine Auswahl!

☐ Arterien ☐ Venen ☐ Kapillaren

Der Begriff, den die meisten Menschen zuerst mit dem Blutkreislauf assoziieren, ist der *Blutdruck*. Der Blutdruck misst den Druck des Blutes in einem Blutgefäß und hat überall im Körper einen anderen Wert. Er ist am größten beim Übergang des Herzens in die Aorta (p_A) und nimmt entlang des Blutkreislaufs immer weiter ab, bis die Venen wieder in das Herz münden (p_V).

Die in Österreich und auch den meisten anderen Ländern verwendete Einheit für den Blutdruck ist $mmHg$ (*Millimeter-Quecksilbersäule*), welche folgendermaßen in *Pascal* umgerechnet werden kann:

$$1\ mmHg \approx 133{,}32\ Pa \tag{9}$$

2.19 Bei einem gesunden erwachsenen Menschen fließen rund 5 Liter Blut pro Minute durch den Blutkreislauf. Für den Druck des Blutes beim Austritt aus dem Herzen zu Beginn des Kreislaufs kann man $p_A \approx 100\ mmHg$ annehmen und für jenen am Ende des Kreislaufs $p_V \approx 5\ mmHg$.
Wandle in SI-Einheiten um, berechne den Strömungswiderstand R des gesamten Blutkreislaufs (=peripherer Widerstand*) und runde sinnvoll! Gib das Ergebnis mit Zehnerpotenzen an!*

2.20 Vergleiche diese Zahl mit dem in Aufgabe 2.16 berechneten Strömungswiderstand der Kanüle! Welcher Widerstand ist größer? Überrascht dich das?

Natürlich unterscheiden sich die Strömungswiderstände der verschiedenen Gefäße des Blutkreislaufs deutlich voneinander, aber dennoch ist der periphere Widerstand eine wichtige Kennzahl des Herz-Kreislauf-Systems.

2.21 Bei körperlicher Belastung, wie zum Beispiel beim Betreiben von Sport, steigt nicht nur der Blutdruck, sondern es erweitern sich auch die Blutgefäße, um eine bessere Durchblutung zu ermöglichen. Berechne den Volumenstrom j, wenn sich der Radius der Blutgefäße um 10 % erhöht, und gib das Ergebnis in Liter pro Minute an (Hinweis: gesunde Erwachsene haben im Ruhezustand, wie bereits in Aufgabe 2.19 angegeben, einen Volumenstrom von rund 5 Litern pro Minute)!

2.22 Um wie viel Prozent steigt also der Volumenstrom j des Blutkreislaufs, wenn sich der Radius der Blutgefäße um 10 % erhöht? Berechne!

Bei sehr anstrengenden Aktivitäten können sogar noch viel höhere Volumenströme von bis zu 25 Litern pro Minute erreicht werden, da ein zusätzliches Ansteigen des Blutdrucks zu einer weiteren Erhöhung des Volumenstroms führt.

Erkrankungen des Blutkreislaufs

Häufig passiert es, dass sich die Arterien von Menschen aufgrund verschiedener Ursachen wie etwa ungesunder Ernährung sehr stark verengen - man spricht dann von Arteriosklerose. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass sich der Durchmesser einer Arterie an einer bestimmten Stelle durch Ablagerungen an den Wänden auf weniger als die Hälfte verringert.

2.23 Wiederholung: Wie ändert sich der Volumenstrom j, wenn sich der Radius r eines Gefäßes halbiert?

2.24 Welcher Volumenstrom würde sich demnach in der Aorta ergeben, wenn ihr Radius auf die Hälfte sinkt (ausgehend von einem ursprünglichen Volumenstrom von 5 Litern pro Minute)? Berechne und gib das Ergebnis in Liter pro Minute an!

In Wirklichkeit wäre so eine niedrige Blutversorgung tödlich, weshalb der Körper gewisse Möglichkeiten hat, den Effekt des Strömungswiderstands auszugleichen. Außerdem gibt es gefäßerweiternde Medikamente, die dem entgegenwirken können. Dennoch kommt es sehr häufig vor, dass der Volumenstrom so stark reduziert wird, dass zu wenig Blut in manche Stellen des Körpers gelangt und es zu einem Infarkt kommt. Besonders gefährlich sind Herz- und Lungeninfarkte sowie Infarkte im Gehirn (Schlaganfälle), die die mit Abstand häufigste Todesursache in Österreich und anderen westlichen Ländern darstellen. Auch wenn es nicht zu einem Infarkt kommt, ist es eine riesige gesundheitliche Belastung für den gesamten Körper, unter Arteriosklerose zu leiden.

Ein zu hoher (*Hypertonie*) bzw. zu niedriger (*Hypotonie*) Blutdruck sind weitere häufige Erkrankungen des Blutkreislaufs. Da nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille Druck und Volumenstrom direkt proportional zueinander sind, führt eine Abweichung des Blutdrucks von der „gesunden Norm“ zu einer Änderung der Durchblutung, was auf lange Zeit viele negative gesundheitliche Folgen mit sich ziehen kann.

Kapitel 3 - Kontinuitätsgesetz

Um die Strömungsgeschwindigkeit von Blut in den verschiedenen Teilen des Blutkreislaufs bestimmen zu können, kann man das Kontinuitätsgesetz anwenden. Dieses besagt nämlich für alle inkompressiblen Flüssigkeiten (darunter Blut), dass der Volumenstrom j in allen Abschnitten eines Rohrsystems gleich groß ist. Für mehrere Rohre n gilt dann:

$$j = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \ \dots \ = A_n \cdot v_n \qquad (10)$$

Dabei bezeichnet A jeweils den Querschnitt des Rohres an einer bestimmten Stelle und v die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit des Fluids.

Der Volumenstrom von Blut ist bereits bekannt ($j \approx 5 \frac{l}{min}$), wodurch wir bei Kenntnis des Querschnitts A der verschiedenen Blutgefäße ganz einfach die Strömungsgeschwindigkeit v von Blut in diesen Gefäßen berechnen können.

3.1 Berechne die Strömungsgeschwindigkeit von Blut in verschiedenen Gefäßen! Der Querschnitt entspricht dabei der Summe der Querschnitte aller parallel zueinander verlaufenden Gefäße.

	Querschnitt	**Rechnung**	$v \approx$
Aorta	$A \approx 7\ cm^2$		
Hohlvenen	$A \approx 6\ cm^2$		
Kapillaren	$A \approx 3000\ cm^2$		

3.2 Formuliere nun in eigenen Worten einen Zusammenhang zwischen dem Gefäßquerschnitt A und der Strömungsgeschwindigkeit v!

3.3 An welchen Stellen des Blutkreislaufs beträgt der gesamte Volumenstrom j 5 Liter pro Minute? Argumentiere mithilfe des Kontinuitätsgesetzes!

Kapitel 4 - Kirchhoff'sche Gesetze für Strömungen

Wiederholung: das Strömungsgesetz für laminare Strömungen hat große Ähnlichkeiten zum Ohm'schen Gesetz im elektrischen Stromkreis.

$U = R \cdot I$ entspricht $\Delta p = R \cdot j$

Mithilfe der *Kirchhoff'schen Gesetze* können Aussagen zu den Gesamtwiderständen bei Serien- und Parallelschaltungen getroffen werden, welche analog auch bei laminaren Strömungen angewandt werden können.

Nacheinander durchflossene Gefäße

Nacheinander durchflossene Gefäße mit unterschiedlichen Abmessungen und somit Strömungswiderständen entsprechen im elektrischen Stromkreis der Serienschaltung. Der Gesamtwiderstand R_{ges} der Strömung ist wie beim elektrischen Analogon die Summe aller Einzelwiderstände $R_1, R_2, \dots, R_n$.

*4.1 Vervollständige die Formel (*1. Kirchhoff'sches Gesetz für Strömungen*)!*

$$R_{ges} = \qquad (11)$$

4.2 Berechne den Gesamtwiderstand R_{ges} eines Gefäßes, wenn Wasser mit $T = 20\ °C$ durch drei gleich lange Rohre ($l = 25\ cm$) mit den Radien $r_1 = 1\ cm,\ r_2 = 10\ cm$ und $r_3 = 20\ cm$ fließt!

4.3 Vergleiche nun den Gesamtwiderstand mit dem Strömungswiderstand des Gefäßes mit dem kleinsten Radius (r_1)! Was fällt dir auf?

4.4 Was bedeuten die Erkenntnisse aus Aufgabe 4.4 und dem 1. Kirchhoff'schen Gesetzes für Strömungen im Blutkreislauf und insbesondere den Strömungswiderstand in den Blutgefäßen?

Parallel durchflossene Gefäße

Fast noch interessanter und relevanter für den Blutkreislauf ist die Situation, wenn sich ein Blutgefäß und damit der Volumenstrom auf mehrere parallel verlaufende Gefäße aufteilt - im elektrischen Stromkreis bezeichnet man das als Parallelschaltung. Das *2. Kirchhoff'sche Gesetz* beschäftigt sich mit diesen *Knotenpunkten*, bei denen sich Gefäße aufteilen. Es besagt, dass der Kehrwert des gesamten Strömungswiderstandes R_{ges} der Summe der Kehrwerte aller einzelnen Strömungswiderstände $R_1, R_2, \dots, R_n$ entspricht.

*4.5 Vervollständige die Formel (*2. Kirchhoff'sches Gesetz für Strömungen*)!*

$$\frac{1}{R_{ges}} = \tag{12}$$

4.6 Angenommen, eine größere Arterie mit $R = 1.200\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}$ *teilt sich auf drei kleinere, identische Arterien mit jeweils* $R = 400\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}$ *auf. Ist der Gesamtströmungswiderstand in der größeren und in den drei kleineren Arterien gleich groß oder nicht? Stelle eine Vermutung auf und begründe!*

4.7 Berechne nun den Gesamtströmungswiderstand der drei Arterien aus Aufgabe 4.6 mithilfe des 2. Kirchhoff'sches Gesetzes!

4.8 Vergleiche das Ergebnis mit dem Strömungswiderstand der größeren Arterie und deiner Vermutung! Entspricht das Ergebnis deiner Erwartung?

4.9 Formuliere nun eine allgemeine Behauptung für den Zusammenhang zwischen dem Gesamtströmungswiderstand und der Anzahl der parallel durchflossenen Gefäße!

Der Volumenstrom j ist wie bereits mehrmals erwähnt im gesamten Blutkreislauf konstant mit etwa 5 Litern pro Minute bei einem erwachsenen Menschen.

4.10 An welchen Stellen im Blutkreislauf erfährt das Blut den größten Strömungswiderstand? Begründe mithilfe aller bisherigen Erkenntnisse (Gesetz von Hagen-Poiseuille, Kontinuitätsgesetz, Kirchhoff'sche Gesetze)!

Anhang

Tabelle: Viskosität von Wasser

Temperatur [°C]	**Eta [N*s/m²]**	
	1bar	100bar
flüssig:		
0	0,001792	0,001770
10	0,001307	0,001296
20	0,001002	0,001000
30	0,000797	0,000789
40	0,000653	0,000654
50	0,000546	0,000549
60	0,000466	0,000469
70	0,000404	0,000408
80	0,000355	0,000361
90	0,000315	0,000324
100	0,000282	0,000293

Tabelle: äußerer Durchmesser und innerer Radius von Kanülen

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um gerundete Werte. Die exakte Werte kannst du bei Bedarf zum Beispiel Wikipedia entnehmen.

Gauge	Äußerer Durchmesser (in mm)	Innerer Radius (in mm)
10	3,40	1,35
11	3,00	1,20
12	2,70	1,08
13	2,40	0,90
14	2,10	0,80
15	1,80	0,69
16	1,60	0,60
17	1,40	0,54
18	1,20	0,42
19	1,10	0,35
20	0,90	0,30
21	0,80	0,25
22	0,70	0,20
23	0,60	0,17
24	0,55	0,15
25	0,50	0,13
26	0,45	0,13
27	0,40	0,10
28	0,36	0,09
29	0,33	0,09
30	0,30	0,08

Literaturverzeichnis

[1] http://ibe.physik.rwth-aachen.de/build-BIO_BKL/index.html (15.04.22)

[2] https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/VIS.pdf (15.04.22)

[3] https://www.spektrum.de/lexikon/physik/blut/1781 (15.04.22)

[4] https://www.amboss.com/de/wissen/Grundlagen_des_Kreislaufes/ (15.04.22)

[5] Bernhard Gonsior (1994): Physik für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten. Stuttgart, Deutschland: Schattauer, 2. Edition.

[6] Robert F. Schmidt, Gerhard Thews, Florian Lang (2000): Physiologie des Menschen. Berlin, Heidelberg: Springer, 28. Auflage.

[7] Rainer Klinke, Stefan Silbernagl (2001): Lehrbuch der Physiologie. Stuttgart, New York: Thieme, 3. Auflage.

Abbildungsverzeichnis

Titelblatt: https://pixabay.com/de/vectors/anatomisch-gesundheitswesen-herz-2023188/

Abbildung 1: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anatomie_Blutkreislauf.svg (bearbeitet)

Abbildung 2: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transicion_laminar_a_turbulento.png (bearbeitet)

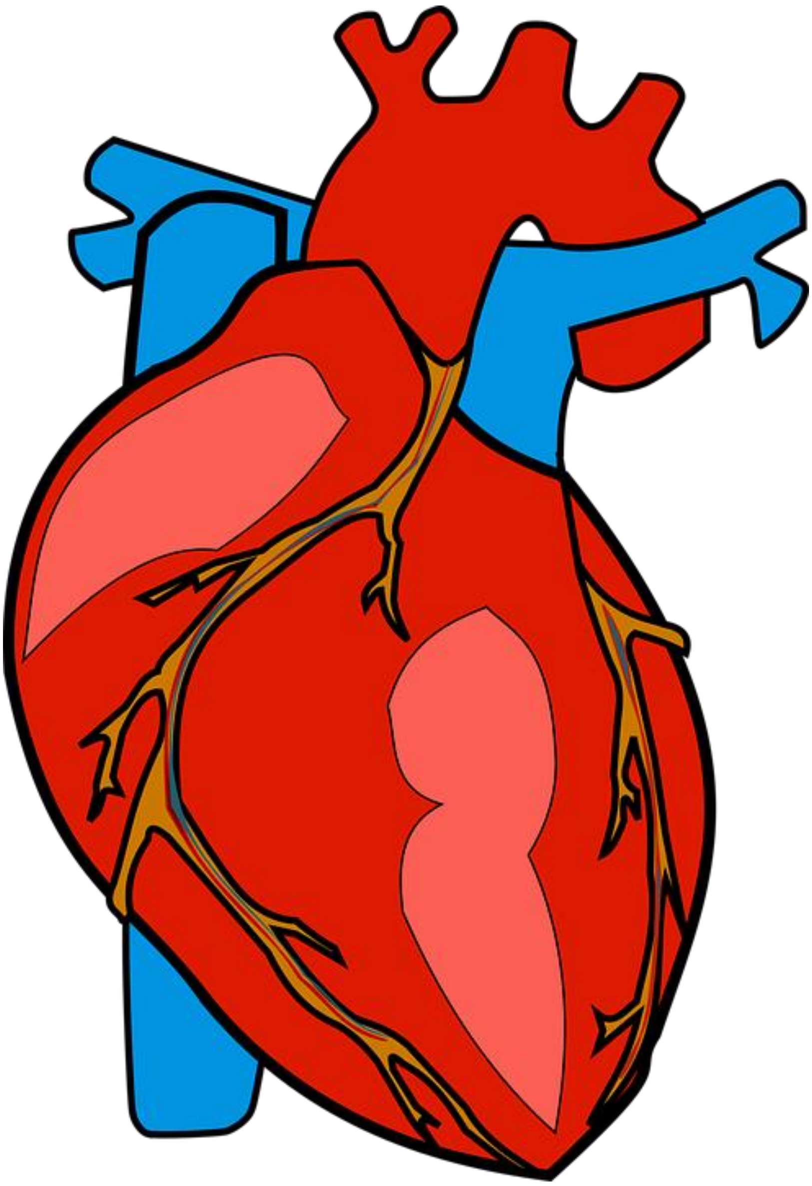
Abbildung 3: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transicion_laminar_a_turbulento.png (bearbeitet)

Abbildung 4: eigene Aufnahme

<u>Ausgearbeitete Aufgabenstellungen (Lösungsvorschlag)</u>

Der Blutkreislauf

aus der Sicht der Biomechanik



von Florian Kleiss, BEd und Dominik Kögel, BEd

Juni 2022

Kapitel 1 – Der Blutkreislauf und die Viskosität

Der Blutkreislauf

Im menschlichen Organismus wird das Blut über ein System von Gefäßen durch den Körper transportiert. Es gibt zwei Kreisläufe, die in Verbindung miteinander stehen: der große *Körperkreislauf* und der kleine *Herz-Lunge-Kreislauf*.

Im Herz-Lunge-Kreislauf wird sauerstoffarmes Blut von der rechten Herzhälfte in die Lunge gepumpt. Dort gibt es CO_2 durch Kapillaren ab und nimmt Sauerstoff auf. Das Blut kommt danach weiter in die linke Herzhälfte, die es in die Arterien ausstößt. Die großen Arterien verfeinern sich in feine Kapillaren, die den Sauerstoff an die Zellen liefern. Die Kapillaren sammeln sich anschließend wieder zu Venen, die das sauerstoff- und nährstoffarme Blut zurück in die rechte Herzhälfte leiten. Der Kreislauf beginnt hier anschließend von Neuem.

1.1 Vervollständige Abbildung 1 mithilfe der Informationen, die du dem Text entnehmen konntest!

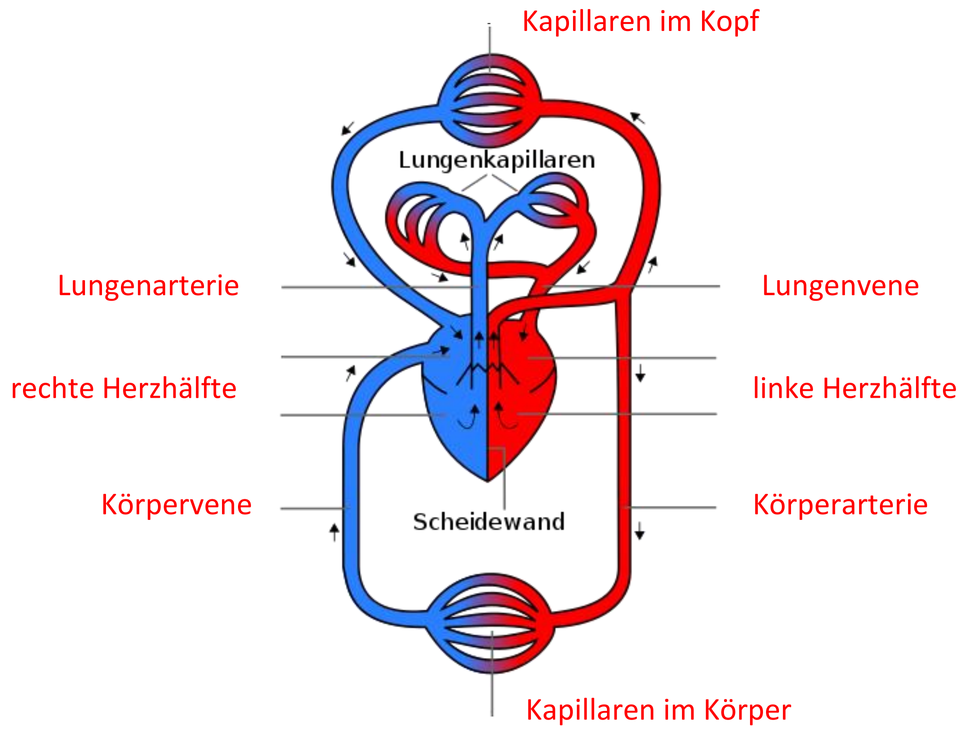


Abbildung 1: Blutkreisläufe im menschlichen Körper

Unser Blutkreislauf besteht aus einer geringen Anzahl an Arterien und Venen, welche einen Durchmesser von bis zu 2 cm haben können! Von den Kapillaren wiederum gibt es Millionen in unserem Körper, allerdings sind sie nur wenige Mikrometer groß.

1.2 Arbeite aus den gegebenen Informationen heraus, um welche Zehnerpotenz sich der Durchmesser von Arterien und Kapillaren unterscheidet!

Arterien und Venen: $d \approx 2 \cdot 10^{-2}\ m$
Kapillaren Durchmesser: $d \approx 10^{-6}\ m$
Die Durchmesser unterscheiden sich um rund 10^4

Strömungen und die Viskosität

Bewegt sich eine Flüssigkeit (Fluid) in einem Leiter (so wie Blut in den Blutgefäßen), so spricht man von einer *Strömung*. Mit einem Stromlinienbild kann man darstellen, wie sich die Flüssigkeitsteilchen während einer Strömung verhalten. Man unterscheidet dabei im Grunde zwischen zwei Fällen:

1) **Laminare Strömungen:** die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen überkreuzen sich nicht.
2) **Turbulente Strömungen:** zwischen den Flüssigkeitsteilchen kommt es zu Verwirbelungen und die Bahnen der Flüssigkeiten kreuzen sich.

1.3 In den Abbildungen 2 und 3 siehst du Stromlinienbilder. Beschrifte sie korrekt!

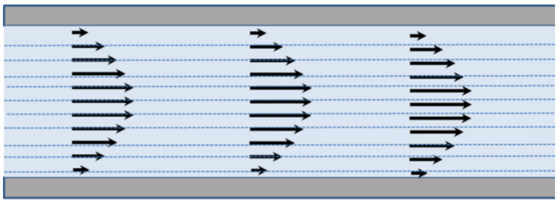


Abbildung 2

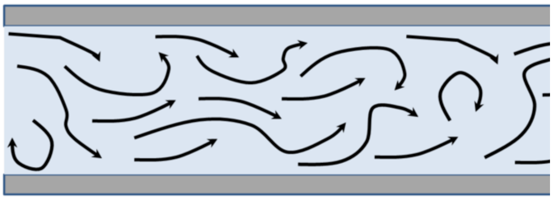


Abbildung 3

Das ist eine laminare Strömung.

Das ist eine turbulente Strömung.

Beim Transport von Flüssigkeiten, wie eben beim Blutkreislauf, sind laminare Strömungen von Vorteil, da bei diesen der Druckverlust entlang des durchflossenen Gefäßes deutlich geringer ausfällt. Doch auch bei der laminaren Strömung finden Energieverluste durch die Reibung von benachbarten Teilchen statt. Die Stärke dieser Reibung hängt von der Art der Flüssigkeit und deren Temperatur ab und wird *Viskosität (Zähigkeit)* η genannt. Es gilt: je geringer die Viskosität, desto dünnflüssiger das Fluid, und je höher die Viskosität, desto dickflüssiger das Fluid. Oft wird die Viskosität in Millipascal mal Sekunde $(mPa \cdot s)$ angegeben.

In der folgenden Tabelle findest du ausgesuchte Werte für die Viskositäten von Flüssigkeiten.

Substanz	$\boldsymbol{\eta}$ **in** $\boldsymbol{mPa \cdot s}$
Wasser (bei 20 $°C$)	1
Motoröl	300
Glycerin	1.480
Blutplasma	1.730
Honig	10.000

1.4 Betrachte die Tabelle und überlege, ob die Viskosität von Blut niedriger oder höher als die von Wasser ist! Begründe deine Vermutung!

Blut ist dickflüssiger als Wasser, weshalb auch seine Viskosität höher ist.

Ist die Viskosität unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit v des Fluids, so sprechen wir von einer *Newton'schen Flüssigkeit*. Beispiele für Newton'sche Flüssigkeiten sind z.B. Wasser und Öl. Die Viskosität von Blut bleibt bei einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit nicht gleich, weshalb es eigentlich kein Newton'sches Fluid ist; dazu aber später mehr.

Auch bei Newton'schen Flüssigkeiten ist die Viskosität nur konstant, wenn man auch die Temperatur der Flüssigkeit konstant hält. Die Viskosität von Wasser ist beispielsweise stark temperaturabhängig: je wärmer das Wasser, umso niedriger die Viskosität.

Blutgefäße haben einen kreisrunden Querschnitt. Im weiteren Verlauf wird stets angenommen, dass es sich um Gefäße mit einem kreisrunden Querschnitt handelt.

Kapitel 2 - Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Einleitung

Um laminare Strömungen von Newton'schen Fluiden in Rohren zu beschreiben, verwendet man den Volumenstrom j, der das durch den Rohrquerschnitt geflossene Volumen ΔV pro Zeiteinheit Δt angibt:

$$j = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (1)$$

Der Volumenstrom j und der durch die Reibung an den Gefäßwänden auftretende Druckverlust (bzw. Druckdifferenz) Δp zwischen dem Anfang und dem Ende des Rohres sind direkt proportional zueinander, mit dem Strömungswiderstand R als Proportionalitätsfaktor:

$$\Delta p = R \cdot j \qquad (2)$$

Der Strömungswiderstand R ist bei laminaren Strömungen eine Konstante, die von mehreren Parametern des Rohres und der Flüssigkeit abhängt. Wegen seiner Ähnlichkeit bezeichnet man Formel (2) auch als das *Ohm'sche Gesetz für laminare Strömungen*.

2.1 Gib das Ohm'sche Gesetz beim elektrischen Stromkreis an!

$U = R \cdot I$ (Spannung = Widerstand mal Stromstärke)

2.2 Welche Variable aus Formel (2) entspricht welchem Teil des Ohm'schen Gesetzes für Stromkreise?

$\Delta p \equiv$ Spannung U

$R \equiv$ Widerstand R

$j \equiv$ Stromstärke I

Abhängigkeit des Strömungswiderstandes R vom Radius

Im weiteren Verlauf wirst du Experimente mit Kanülen durchführen. Die Größen aller im Handel erhältlichen Kanülen entsprechen der ISO-Norm, wobei auf der Verpackung immer der äußere Durchmesser der Kanüle angegeben ist. *Für das Experiment relevant ist allerdings der innere Radius r der Kanüle!* Im Anhang findest du eine Tabelle, in der du bei bekanntem äußeren Durchmesser den inneren Radius der Kanüle ablesen kannst und umgekehrt.

Zunächst interessiert uns die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes vom Radius r des (zylinderförmigen) Gefäßes. Führe zum Einstieg dazu einen kleinen Versuch durch!

2.3 Befülle eine Spritze mit $10\ ml$ Wasser und setze eine Kanüle mit innerem Radius $r = 0{,}30\ mm$ auf. Versuche nun, das Wasser aus der Spritze durch die Kanüle zu drücken. Wiederhole den Versuch, verwende diesmal aber eine Kanüle mit $r = 0{,}15\ mm$. Achte darauf, beide Male so gut es geht mit gleicher Kraft zu drücken! Was fällt dir auf?

Die Schüler*innen sollen hier bemerken, dass das Wasser bei einer Kanüle mit größeren Radius deutlich schneller aus der Spritze fließt bzw. ein viel geringerer Widerstand beim Drücken zu bemerken ist.

2.4 Versuche nun, in eigenen Worten den Zusammenhang zwischen den Radius r und dem Volumenstrom j zu beschreiben!

Hier ist jede Antwort in Ordnung, da es sich um eine Vermutung handelt. In den meisten Fällen kommt hier entweder eine rein qualitative Antwort oder bereits eine quantitative wie z.B. die Vermutung eines direkt proportionalen oder quadratischen Zusammenhangs.

2.5 Der Volumenstrom und der Radius des Rohres sind jedoch sicher nicht direkt proportional zueinander (also eine Verdoppelung des Radius r führt nicht zu einem doppelt so großen Volumenstrom j). Begründe, warum das nicht der Fall sein kann!

Aufgrund der kreisförmigen Querschnittsfläche der Spritze geht der Radius quadratisch in den Flächeninhalt, der ja für die Durchflussrate relevant ist, ein.

2.6 Welchen mathematischen Zusammenhang erwartest du stattdessen zwischen dem Radius r des Gefäßes und dem Volumenstrom j der Flüssigkeit (mit welcher Potenz wirkt r auf j ein)? Verfasse eine Vermutung und argumentiere!

Spätestens hier sollten die SuS in den allermeisten Fällen einen quadratischen Zusammenhang vermuten.

Deine Annahme wollen wir nun experimentell überprüfen. Bevor jedoch der Versuch durchgeführt werden kann, müssen wir noch einmal kurz zum Ohm'schen Gesetz für laminare Strömungen (Formel (2)) zurückkehren.

Aus den bisherigen Überlegungen kann die Annahme getroffen werden, dass der Strömungswiderstand R bei einer konstanten Druckdifferenz Δp folgendermaßen mit dem Radius r des Rohres zusammenhängt:

$$R = k \cdot \frac{1}{r^b} \tag{3}$$

In Formel (3) bezeichnet b jene Potenz, welche für den Radius r in Aufgabe 2.5 vermutet wurde. Die Variable k fungiert zunächst als Platzhalter für alle weiteren Parameter von R.

Die Annahme aus Formel (3) kann nun in das Strömungsgesetz aus Formel (2) eingesetzt und nach Δt umgeformt werden:

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{\Delta p} \cdot k \cdot \frac{1}{r^b} \tag{4}$$

Im Zuge des Versuchs werden sowohl Volumen- und Druckdifferenz als auch alle weiteren Parameter des Strömungswiderstandes (R) konstant gehalten, weshalb der Faktor $\frac{\Delta V}{\Delta p} \cdot k$ als Konstante a abgekürzt werden kann. Die Zeit t, bis die gesamte Flüssigkeit durch die Kanüle entronnen ist, ist dann nur noch eine Funktion des Radius r:

$$t(r) = a \cdot \frac{1}{r^b} = a \cdot r^{-b} \tag{5}$$

Der Faktor a ist an dieser Stelle für uns noch uninteressant. Die Vermutung für den Wert der Potenz b soll nun experimentell überprüft werden.

Um die Potenz b experimentell herauszufinden, brauchst du die folgenden Materialien:

- Stativmaterial
- eine 10 ml-Spritze mit einem gut beweglichen Kolben
- Kanülen mit vier verschiedenen äußeren Durchmessern
- ein großes Becherglas
- ein Massestück (idealerweise zylinderförmig; in unserem Fall zum Beispiel $m = 1\ kg$)

Der Versuch sollte für dich schon aufgebaut sein und in etwa wie in Abbildung 4 aussehen. Die Spritze wird so am Stativ befestigt, dass sie zwar fest sitzt, aber der Kolben noch immer gut beweglich ist. Das Becherglas wird zum Teil mit Wasser gefüllt und unter der Spritze platziert.

Abbildung 4: Versuchsaufbau

2.7 Überprüfe, ob der Versuch richtig aufgebaut ist, und befülle die Spritze mit $5\ ml$ Wasser. Stecke die erste der vier Kanülen auf die Spritze, lege das Massestück mittig auf und miss die Zeit zwischen dem Ein- und Aussetzen des Wasserstrahls. Sei dabei sehr genau und dokumentiere alle Messungen in der Tabelle weiter unten! Führe den Versuch vier weitere Male mit der gleichen Kanüle durch und ermittle danach den Mittelwert der fünf Messungen, um einen besonders genauen Wert für die verstrichene Zeit zu erhalten! Wiederhole im Anschluss den Versuch mit drei weiteren Kanülen!

Anmerkung 1: Erinnere dich daran, dass für das Experiment nicht der äußere Durchmesser, den du auf der Verpackung findest, sondern der innere Radius der Kanüle relevant ist! Benütze die Tabelle im Anhang, um die inneren Radien herauszufinden!

Anmerkung 2: Da immer dasselbe Massestück verwendet wird, ist der Druckunterschied Δp konstant. Befüllst du die Spritze vor jedem Durchgang mit derselben Menge Wasser, ist auch ΔV konstant.

Ergebnisse der Messungen: *(nur ein Beispiel für einen Radius, wie es aussehen könnte)*

	r_1 = **0,3 mm**	r_2 =	r_3 =	r_4 =
t_1	48,5 s			
t_2	49,2 s			
t_3	48,7 s			
t_4	49,0 s			
t_5	48,6 s			
Mittelwert $\bar{t}$	48,8 s			

Gib nun die Wertepaare (Radius r_i mit entsprechendem Mittelwert $\bar{t}$) als Punkte im Programm GeoGebra *ein! Mithilfe der Funktion* TrendPot *wird dir eine Regressionskurve angezeigt, aus der du den Wert für b ablesen kannst. Runde anschließend auf die Einerstelle, sodass du eine natürliche Zahl erhältst!*

$$b = \mathit{Ergebnis\ aus\ GeoGebra} \approx 4$$

Der Radius r des Gefäßes geht also mit der 4. Potenz in den Strömungswiderstand R einer Flüssigkeit ein. Vervollständige Formel (6)!

$$R = k \cdot \frac{1}{r^4} \qquad (6)$$

Stimmt das mit deiner Erwartung aus Aufgabe 2.6 überein? ☐ ja ☒ nein

2.8 Versuche nun, eine (physikalische) Erklärung dafür zu finden, warum es sein kann, dass der Radius mit der eben herausgefundenen Potenz den Strömungswiderstand des Fluids beeinflusst! Tausche dich dazu gerne mit der Lehrperson und den anderen Lernenden aus!

Eine anschauliche und vor allem für die SuS intuitive Erklärung für diese Gesetzmäßigkeit konnte von uns Autoren bisher noch nicht gefunden werden. Bei dieser Frage geht es also eher darum, dass die SuS einerseits zumindest versuchen, eine für sie treffende physikalische Erklärung zu finden, und andererseits am Ende mithilfe der Lehrperson womöglich zu dem Schluss kommen, dass nicht jede physikalische Gesetzmäßigkeit für uns Menschen simpel und intuitiv nachvollziehbar sein muss.

2.9 Was passiert demnach mit dem Volumenstrom j, wenn man den Radius des Gefäßes halbiert bzw. drittelt? Versuche danach, einen allgemeinen Zusammenhang zu formulieren!

Halbiert man den Radius, so sinkt der Volumenstrom auf ein 16-tel.
Drittelt man den Radius, so sinkt der Volumenstrom auf 81-tel.
Allgemein: n-telt man den Radius, so sinkt der Volumenstrom auf ein n^4-tel.

Abhängigkeit des Strömungsradius R von anderen Parametern

In den Strömungswiderstand R und somit in das Strömungsgesetz fließen jedoch noch weitere Parameter ein, die wir in Formel (3) als Konstante k zusammengefasst haben. Dabei handelt es sich einerseits um die bereits in Teil 1 besprochene Viskosität η und andererseits um die Rohrlänge l. Beide waren beim vorherigen Versuch konstant, weshalb wir sie dort nicht weiter beachten mussten. Nun wollen wir zumindest qualitative Aussagen mithilfe weiterer Experimente versuchen.

2.10 Formuliere Vermutungen für die Zusammenhänge zwischen der Viskosität η und der Rohrlänge l zum Volumenstrom j (direkt oder indirekt proportional) und begründe deine Entscheidung!

Hier geht es erneut um Vermutungen, die danach überprüft werden sollen. Den indirekt proportionalen Zusammenhang mit der Viskosität sollten die SuS aber schon erkennen und begründen können.

Erneut wollen wir nun deine Vermutungen überprüfen.

2.11 Verwende den Versuchsaufbau von vorhin und schließe nacheinander zwei verschiedene Kanülen mit gleichem inneren Radius r, aber unterschiedlicher Rohrlänge l an! Miss erneut jeweils die Zeit zwischen Anfang und Ende des austretenden Wasserstrahls! Was fällt dir auf?

Die SuS sollten hier einen reziproken Zusammenhang zwischen Rohrlänge und Volumenstrom erkennen, jedoch fällt der Zeitunterschied nicht allzu deutlich aus.

2.12 Nun wollen wir noch die Abhängigkeit des Strömungswiderstands von der Viskosität überprüfen. Wiederhole dazu den Versuch, verwende diesmal aber beide Male dieselbe Kanüle! Fülle stattdessen einmal kaltes ($T \approx 10°\ C$) und einmal heißes ($T \approx 40°\ C$) Wasser in die Spritze. Was fällt dir auf?

(Hinweis: wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, sinkt die Viskosität von Wasser, wenn man die Temperatur erhöht. Bei $40°\ C$ hat Wasser circa die halbe Viskosität wie bei $10°\ C$.)

Die SuS sollten hier einen indirekt proportionalen (oder zumindest reziproken) Zusammenhang zwischen Viskosität und Volumenstrom erkennen, da der Durchfluss aufgrund der halben Viskosität ziemlich genau doppelt so lange dauert.

2.13 Vergleiche deine Beobachtungen mit deinen Erwartungen aus Aufgabe 2.10! Stimmen Vermutung und Ergebnis überein? Was überrascht dich?

Die Antwort kommt auf die Vermutung in 2.9 an, die Rohrlänge könnte aber überraschend sein.

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen

Es sind nun alle notwendigen Parameter erarbeitet, um das Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen vollständig aufstellen zu können.

2.14 Fülle zunächst die Formel des Strömungswiderstands R anhand der Ergebnisse aus 2.11 und 2.12 vollständig mit den Parametern η, l und r auf (Hinweis: η und l gehen mit der Potenz 1 in die Formel ein)!

$$R = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\mu \cdot l}{r^4} \tag{7}$$

Bei $\frac{8}{\pi}$ handelt es sich um eine Konstante, die bei der mathematischen Herleitung des Gesetzes herausgefunden wurde und die die Geometrie des Gefäßes widerspiegelt.

2.15 Setze nun Formel (7) in das Strömungsgesetz aus Formel (2) ein, um das vollständige Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömungen *zu erhalten!*

$$\Delta p = R \cdot j = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\mu \cdot l}{r^4} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{8}$$

Überlege, ob die Erhöhung der Parameter ($\Delta p, \eta, l, r$) zu einer Steigerung bzw. Senkung des Volumenstroms j führt und trage sie in die passende Spalte ein!

Volumenstrom steigt	**Volumenstrom sinkt**
$\Delta p, r$	μ, l

Es folgen nun zwei quantitative Aufgaben, bei denen das Gesetz von Hagen-Poiseuille angewandt wird.

2.16 Berechne den Strömungswiderstand R einer Kanüle deiner Wahl! Wähle dazu die Viskosität, die Wasser bei $20°C$ hat (die Viskositäten von Wasser bei verschiedenen Temperaturen findest du im Anhang)! Die Einheit des Strömungswiderstandes ist $Pa \cdot s/m^3$.

Beispiel, falls $l = 2\ cm$ und $r = 0{,}3\ mm$ (μ ist im Anhang zu finden)

$$R = \frac{8 \cdot \mu \cdot l}{\pi \cdot r^4} \approx 6{,}3 \cdot 10^9\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}$$

2.17 Wie groß ist der Druckverlust Δp, der durch die Reibung des Fluids an den Wänden zwischen den beiden Enden der Kanüle entsteht (Hinweis: den Volumenstrom j kannst du mithilfe der vorhin durchgeführten Messung berechnen)?

$j = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{5\ ml}{48{,}8\ s} \approx 10^{-7}\ m^3/s$

$\Delta p = R \cdot j \approx 630\ Pa$

Anwendung im Blutkreislauf

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille kann auch auf Flüssigkeitskreisläufe bei Lebewesen angewandt werden, wie etwa den Blutkreislauf beim Menschen. Blut ist zwar, wie in Teil 1 erwähnt, kein Newton'sches Fluid, aber unter natürlichen Druckverhältnissen in Blutgefäßen, die einen Radius von mehr als $1\ mm$ haben, verhält es sich so, als wäre es eines. Für welche Blutgefäße kann man also das Gesetz von Hagen-Poiseuille relativ bedenkenlos anwenden?

2.18 Kreuze an und begründe danach deine Auswahl!

[X] Arterien [X] Venen [ ] Kapillaren

Der Durchmesser von Kapillaren ist deutlich kleiner als $1\ mm$ (siehe Kapitel 1).

Der Begriff, den die meisten Menschen zuerst mit dem Blutkreislauf assoziieren, ist der *Blutdruck*. Der Blutdruck misst den Druck des Blutes in einem Blutgefäß und hat überall im Körper einen anderen Wert. Er ist am größten beim Übergang des Herzens in die Aorta (p_A) und nimmt entlang des Blutkreislaufs immer weiter ab, bis die Venen wieder in das Herz münden (p_V).

Die in Österreich und auch den meisten anderen Ländern verwendete Einheit für den Blutdruck ist $mmHg$ (*Millimeter-Quecksilbersäule*), welche folgendermaßen in *Pascal* umgerechnet werden kann:

$$1\ mmHg \approx 133{,}32\ Pa \quad (9)$$

2.19 Bei einem gesunden erwachsenen Menschen fließen rund 5 Liter Blut pro Minute durch den Blutkreislauf. Für den Druck des Blutes beim Austritt aus dem Herzen zu Beginn des Kreislaufs kann man $p_A \approx 100\ mmHg$ annehmen und für jenen am Ende des Kreislaufs $p_V \approx 5\ mmHg$. Wandle in SI-Einheiten um, berechne den Strömungswiderstand R des gesamten Blutkreislaufs (=peripherer Widerstand) *und runde sinnvoll! Gib das Ergebnis mit Zehnerpotenzen an!*

$\Delta p \approx 95\ mmHg \approx 12.665\ Pa$

$j \approx 5\ l/min \approx 8{,}3 \cdot 10^{-5}\ m^3/s$

$R = \frac{\Delta p}{j} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}$

2.20 Vergleiche diese Zahl mit dem in Aufgabe 2.16 berechneten Strömungswiderstand der Kanüle! Welcher Widerstand ist größer? Überrascht dich das?

Je nachdem, welche Kanüle man gewählt hat, kommt hier ein anderes Ergebnis heraus. Auf jeden Fall sollten die SuS merken, dass es etwa in derselben Größenordnung liegt.

Natürlich unterscheiden sich die Strömungswiderstände der verschiedenen Gefäße des Blutkreislaufs deutlich voneinander, aber dennoch ist der periphere Widerstand eine wichtige Kennzahl des Herz-Kreislauf-Systems.

2.21 Bei körperlicher Belastung, wie zum Beispiel beim Betreiben von Sport, steigt nicht nur der Blutdruck, sondern es erweitern sich auch die Blutgefäße, um eine bessere Durchblutung zu ermöglichen. Berechne den Volumenstrom j, wenn sich der Radius der Blutgefäße um 10 % erhöht, und gib das Ergebnis in Liter pro Minute an (Hinweis: gesunde Erwachsene haben im Ruhezustand, wie bereits in Aufgabe 2.19 angegeben, einen Volumenstrom von rund 5 Litern pro Minute)!

Eine Erhöhung des Radius um 10% entspricht einer Erhöhung des Volumenstroms um den Faktor $1{,}1^4$.

$5 \cdot 1{,}1^4 \approx 7{,}32\ l.$

2.22 Um wie viel Prozent steigt also der Volumenstrom j des Blutkreislaufs, wenn sich der Radius der Blutgefäße um 10 % erhöht? Berechne!

$\frac{7{,}32}{5} \approx 1{,}46$

Der Volumenstrom wächst fast auf das Eineinhalbfache (Erhöhung um rund 46%).

Bei sehr anstrengenden Aktivitäten können sogar noch viel höhere Volumenströme von bis zu 25 Litern pro Minute erreicht werden, da ein zusätzliches Ansteigen des Blutdrucks zu einer weiteren Erhöhung des Volumenstroms führt.

Erkrankungen des Blutkreislaufs

Häufig passiert es, dass sich die Arterien von Menschen aufgrund verschiedener Ursachen wie etwa ungesunder Ernährung sehr stark verengen - man spricht dann von Arteriosklerose. Es kann dabei durchaus vorkommen, dass sich der Durchmesser einer Arterie an einer bestimmten Stelle durch Ablagerungen an den Wänden auf weniger als die Hälfte verringert.

2.23 Wiederholung: Wie ändert sich der Volumenstrom j, wenn sich der Radius r eines Gefäßes halbiert?

Halbierung des Radius bedeutet, dass der Volumenstrom auf ein Sechzehntel sinkt.

2.24 Welcher Volumenstrom würde sich demnach in der Aorta ergeben, wenn ihr Radius auf die Hälfte sinkt (ausgehend von einem ursprünglichen Volumenstrom von 5 Litern pro Minute)? Berechne und gib das Ergebnis in Liter pro Minute an!

$$5 \cdot \frac{1}{16} = 0{,}3125\ l/min$$

In Wirklichkeit wäre so eine niedrige Blutversorgung tödlich, weshalb der Körper gewisse Möglichkeiten hat, den Effekt des Strömungswiderstands auszugleichen. Außerdem gibt es gefäßerweiternde Medikamente, die dem entgegenwirken können. Dennoch kommt es sehr häufig vor, dass der Volumenstrom so stark reduziert wird, dass zu wenig Blut in manche Stellen des Körpers gelangt und es zu einem Infarkt kommt. Besonders gefährlich sind Herz- und Lungeninfarkte sowie Infarkte im Gehirn (Schlaganfälle), die die mit Abstand häufigste Todesursache in Österreich und anderen westlichen Ländern darstellen. Auch wenn es nicht zu einem Infarkt kommt, ist es eine riesige gesundheitliche Belastung für den gesamten Körper, unter Arteriosklerose zu leiden.

Ein zu hoher (*Hypertonie*) bzw. zu niedriger (*Hypotonie*) Blutdruck sind weitere häufige Erkrankungen des Blutkreislaufs. Da nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille Druck und Volumenstrom direkt proportional zueinander sind, führt eine Abweichung des Blutdrucks von der „gesunden Norm“ zu einer Änderung der Durchblutung, was auf lange Zeit viele negative gesundheitliche Folgen mit sich ziehen kann.

Kapitel 3 - Kontinuitätsgesetz

Um die Strömungsgeschwindigkeit von Blut in den verschiedenen Teilen des Blutkreislaufs bestimmen zu können, kann man das Kontinuitätsgesetz anwenden. Dieses besagt nämlich für alle inkompressiblen Flüssigkeiten (darunter Blut), dass der Volumenstrom j in allen Abschnitten eines Rohrsystems gleich groß ist. Für mehrere Rohre n gilt dann:

$$j = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \ \dots \ = A_n \cdot v_n \qquad (10)$$

Dabei bezeichnet A jeweils den Querschnitt des Rohres an einer bestimmten Stelle und v die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit des Fluids.

Der Volumenstrom von Blut ist bereits bekannt ($j \approx 5 \frac{l}{min}$), wodurch wir bei Kenntnis des Querschnitts A der verschiedenen Blutgefäße ganz einfach die Strömungsgeschwindigkeit v von Blut in diesen Gefäßen berechnen können.

3.1 Berechne die Strömungsgeschwindigkeit von Blut in verschiedenen Gefäßen! Der Querschnitt entspricht dabei der Summe der Querschnitte aller parallel zueinander verlaufenden Gefäße.

	Querschnitt	**Rechnung**	$v \approx$
Aorta	$A \approx 7\ cm^2$	$v = \frac{j}{A} \approx \frac{8{,}3 \cdot 10^{-5}}{0{,}0007}$	$0{,}12\ m/s$
Hohlvenen	$A \approx 6\ cm^2$	$v = \frac{j}{A} \approx \frac{8{,}3 \cdot 10^{-5}}{0{,}0006}$	$0{,}14\ m/s$
Kapillaren	$A \approx 3000\ cm^2$	$v = \frac{j}{A} \approx \frac{8{,}3 \cdot 10^{-5}}{0{,}3}$	$0{,}0003\ m/s$

3.2 Formuliere nun in eigenen Worten einen Zusammenhang zwischen dem Gefäßquerschnitt A und der Strömungsgeschwindigkeit v!

Umso größer der Gefäßquerschnitt, umso kleiner der Volumenstrom (indirekt proportional).

3.3 An welchen Stellen des Blutkreislaufs beträgt der gesamte Volumenstrom j 5 Liter pro Minute? Argumentiere mithilfe des Kontinuitätsgesetzes!

An jeder Stelle, der Volumenstrom ist aufgrund des Kontinuitätsgesetzes im gesamten Kreislauf konstant.

Kapitel 4 - Kirchhoff'sche Gesetze für Strömungen

Wiederholung: das Strömungsgesetz für laminare Strömungen hat große Ähnlichkeiten zum Ohm'schen Gesetz im elektrischen Stromkreis.

$U = R \cdot I$ entspricht $\Delta p = R \cdot j$

Mithilfe der *Kirchhoff'schen Gesetze* können Aussagen zu den Gesamtwiderständen bei Serien- und Parallelschaltungen getroffen werden, welche analog auch bei laminaren Strömungen angewandt werden können.

Nacheinander durchflossene Gefäße

Nacheinander durchflossene Gefäße mit unterschiedlichen Abmessungen und somit Strömungswiderständen entsprechen im elektrischen Stromkreis der Serienschaltung. Der Gesamtwiderstand R_{ges} der Strömung ist wie beim elektrischen Analogon die Summe aller Einzelwiderstände $R_1, R_2, \dots, R_n$.

*4.1 Vervollständige die Formel (*1. Kirchhoff'sches Gesetz für Strömungen*)!*

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \tag{11}$$

4.2 Berechne den Gesamtwiderstand R_{ges} eines Gefäßes, wenn Wasser mit $T = 20\,°C$ durch drei gleich lange Rohre ($l = 25\ cm$) mit den Radien $r_1 = 1\ cm$, $r_2 = 10\ cm$ und $r_3 = 20\ cm$ fließt!

$R = \frac{8 \cdot \mu \cdot l}{\pi \cdot r^4}$, $\mu_{20°C} \approx 0{,}001 \frac{N}{s \cdot m^2}$ (siehe Anhang)

$R_1 \approx 63660 \frac{Pa \cdot s}{m^3}$, $R_2 \approx 6{,}4 \frac{Pa \cdot s}{m^3}$, $R_3 \approx 0{,}4 \frac{Pa \cdot s}{m^3}$

$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3 \approx 63666{,}8 \frac{Pa \cdot s}{m^3}$

4.3 Vergleiche nun den Gesamtwiderstand mit dem Strömungswiderstand des Gefäßes mit dem kleinsten Radius (r_1)! Was fällt dir auf?

Der Gesamtwiderstand entspricht im Wesentlichen dem Strömungswiderstand des kleinsten Gefäßes.

4.4 Was bedeuten die Erkenntnisse aus Aufgabe 4.4 und dem 1. Kirchhoff'schen Gesetzes für Strömungen im Blutkreislauf und insbesondere den Strömungswiderstand in den Blutgefäßen?

Die Gefäße mit dem kleinsten Radius beeinflussen den Strömungswiderstand und somit den Volumenstrom des Blutes im gesamten Kreislauf quasi im Alleingang (vergleiche auch Kontinuitätsgesetz)!

Parallel durchflossene Gefäße

Fast noch interessanter und relevanter für den Blutkreislauf ist die Situation, wenn sich ein Blutgefäß und damit der Volumenstrom auf mehrere parallel verlaufende Gefäße aufteilt - im elektrischen Stromkreis bezeichnet man das als Parallelschaltung. Das *2. Kirchhoff'sche Gesetz* beschäftigt sich mit diesen *Knotenpunkten*, bei denen sich Gefäße aufteilen. Es besagt, dass der Kehrwert des gesamten Strömungswiderstandes R_{ges} der Summe der Kehrwerte aller einzelnen Strömungswiderstände $R_1, R_2, \ldots, R_n$ entspricht.

*4.5 Vervollständige die Formel (*2. Kirchhoff'sches Gesetz für Strömungen*)!*

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \qquad (12)$$

4.6 Angenommen, eine größere Arterie mit $R = 1.200\ \frac{Pa\cdot s}{m^3}$ teilt sich auf drei kleinere, identische Arterien mit jeweils $R = 400\ \frac{Pa\cdot s}{m^3}$ auf. Ist der Gesamtströmungswiderstand in der größeren und in den drei kleineren Arterien gleich groß oder nicht? Stelle eine Vermutung auf und begründe!

Hier kann es viele verschiedene Vermutungen geben. Besonders toll ist es, wenn SuS mit der Parallelschaltung beim elektrischen Stromkreis argumentieren.

4.7 Berechne nun den Gesamtströmungswiderstand der drei Arterien aus Aufgabe 4.6 mithilfe des 2. Kirchhoff'sches Gesetzes!

$$\frac{1}{R_{Kapillaren}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{400}$$

$$R_{Kapillaren} \approx 133\ \frac{Pa\cdot s}{m^3}$$

4.8 Vergleiche das Ergebnis mit dem Strömungswiderstand der größeren Arterie und deiner Vermutung! Entspricht das Ergebnis deiner Erwartung?

Hier sollen die SuS nur ihre Vermutung überprüfen.

4.9 Formuliere nun eine allgemeine Behauptung für den Zusammenhang zwischen dem Gesamtströmungswiderstand und der Anzahl der parallel durchflossenen Gefäße!

Durch die Aufspaltung eines Gefäßes in mehrere parallel durchflossene Gefäße sinkt der Gesamtströmungswiderstand stark ab. Umso mehr parallel durchflossene Gefäße, umso geringer der Strömungswiderstand (vergleiche mit Parallelschaltung beim elektrischen Stromkreis).

Der Volumenstrom j ist wie bereits mehrmals erwähnt im gesamten Blutkreislauf konstant mit etwa 5 Litern pro Minute bei einem erwachsenen Menschen.

4.10 An welchen Stellen im Blutkreislauf erfährt das Blut den größten Strömungswiderstand? Begründe mithilfe aller bisherigen Erkenntnisse (Gesetz von Hagen-Poiseuille, Kontinuitätsgesetz, Kirchhoff'sche Gesetze)!

Zur Beantwortung dieser Frage sollen die SuS noch einmal genauer über alle Erkenntnisse dieses Aufgabenhefts nachdenken. Man kann hier mehrere Argumentationen „gelten lassen", da sich diese Frage nicht so einfach direkt beantworten lässt, da viele Faktoren hineinfließen (wie viele parallele Blutgefäße, Radius der Gefäße etc.).

Anhang

Tabelle: Viskosität von Wasser

Temperatur [°C]	Eta [N*s/m²]	
	1bar	100bar
flüssig:		
0	0,001792	0,001770
10	0,001307	0,001296
20	0,001002	0,001000
30	0,000797	0,000789
40	0,000653	0,000654
50	0,000546	0,000549
60	0,000466	0,000469
70	0,000404	0,000408
80	0,000355	0,000361
90	0,000315	0,000324
100	0,000282	0,000293

Tabelle: äußerer Durchmesser und innerer Radius von Kanülen

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um gerundete Werte. Die exakte Werte kannst du bei Bedarf zum Beispiel Wikipedia entnehmen.

Gauge	Äußerer Durchmesser (in mm)	Innerer Radius (in mm)
10	3,40	1,35
11	3,00	1,20
12	2,70	1,08
13	2,40	0,90
14	2,10	0,80
15	1,80	0,69
16	1,60	0,60
17	1,40	0,54
18	1,20	0,42
19	1,10	0,35
20	0,90	0,30
21	0,80	0,25
22	0,70	0,20
23	0,60	0,17
24	0,55	0,15
25	0,50	0,13
26	0,45	0,13
27	0,40	0,10
28	0,36	0,09
29	0,33	0,09
30	0,30	0,08

Literaturverzeichnis

[1] http://ibe.physik.rwth-aachen.de/build-BIO_BKL/index.html (15.04.22)

[2] https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/VIS.pdf (15.04.22)

[3] https://www.spektrum.de/lexikon/physik/blut/1781 (15.04.22)

[4] https://www.amboss.com/de/wissen/Grundlagen_des_Kreislaufes/ (15.04.22)

[5] Bernhard Gonsior (1994): Physik für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten. Stuttgart, Deutschland: Schattauer, 2. Edition.

[6] Robert F. Schmidt, Gerhard Thews, Florian Lang (2000): Physiologie des Menschen. Berlin, Heidelberg: Springer, 28. Auflage.

[7] Rainer Klinke, Stefan Silbernagl (2001): Lehrbuch der Physiologie. Stuttgart, New York: Thieme, 3. Auflage.

Abbildungsverzeichnis

Titelblatt: https://pixabay.com/de/vectors/anatomisch-gesundheitswesen-herz-2023188/

Abbildung 1: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anatomie_Blutkreislauf.svg
(bearbeitet)

Abbildung 2: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transicion_laminar_a_turbulento.png
(bearbeitet)

Abbildung 3: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transicion_laminar_a_turbulento.png
(bearbeitet)

Abbildung 4: eigene Aufnahme